ANNEXE AU RAPPORT CALCUL

Nous présentons ci-après quelques exemples annoncés dans le texte principal. Ils nous servent à illustrer certains points du rapport et, plus particulièrement :

- les rapports entre calcul et raisonnement et la nécessité, pour qu'ils se développent, que l'élève soit confronté à une certaine complexité du calcul, complexité toute relative bien sûr,
- le rôle joué dans le calcul par la reconnaissance de formes, l'analogie, le changement de point de vue, de cadre et de mode de représentation, l'examen de cas limites ainsi que l'introduction de variations,
- les rapports entre calcul exact et approché,
- les rapports entre calcul instrumenté et calcul papier / crayon.

Nous voudrions préciser que ces exemples sont issus, presque tous, de situations effectivement réalisées dans des classes. Nous sommes bien conscients qu'ils ne correspondent pas, pour la plupart d'entre eux, au quotidien du calcul aujourd'hui en classe et que les problèmes posés peuvent, pour certains, paraître difficiles. Mais nous voudrions souligner que les réalisations dans les classes ont concerné des classes ordinaires, avec des élèves ordinaires, que les élèves se sont investis dans la résolution des problèmes posés et ont conduit à cette occasion un réel travail mathématique. Bien sûr, ceci dépend non seulement des caractéristiques des problèmes posés mais aussi des scénarios didactiques qui ont été élaborés pour les faire vivre en classe et de la gestion de ces scénarios par les enseignants. C'est pourquoi, nous renvoyons, dans un certain nombre de cas, le lecteur à des publications où les analyses didactiques correspondantes sont détaillées.

EXEMPLE 1 : CALCUL, RAISONNEMENT ET PREUVES : « LE PLUS GRAND PRODUIT »

Ce problème est l'un des problèmes qui ont été expérimentés par l'équipe ERMEL de l'INRP [1] et nous renvoyons le lecteur à ce texte pour plus de détail sur les expérimentations menées et leurs résultats. Il nous semble bien illustrer les possibilités offertes au calcul raisonné et à la preuve par des situations numériques simples dès l'école élémentaire.

Le problème est le suivant :

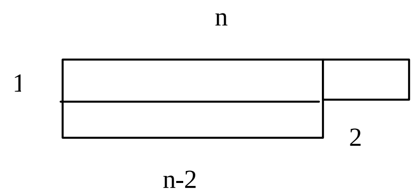
Chercher, parmi les décompositions additives d'un nombre entier en somme de nombres entiers, celle ou celles qui correspondent au plus grand produit.

Même si le nombre n'est pas très grand, la combinatoire des essais possibles est rapidement grande : pour 10 par exemple, il y en a déjà 11 si l'on exclut les décompositions comportant des 0 et des 1, rapidement éliminées par les élèves, et pour 14, il y en a 33. La recherche nécessite donc organisation et réflexion.
Si l'on se restreint aux décompositions à deux termes, le produit est maximum lorsque ces deux termes sont égaux dans le cas pair et diffèrent d'une unité dans le cas impair. Géométriquement, on retrouve la propriété du carré d'être le rectangle d'aire maximum pour un périmètre donné. Mais très vite, on s'aperçoit que les décompositions à deux termes ne sont pas optimales dès que le nombre proposé est supérieur ou égal à 8. L'idée de rechercher le maximum du produit à travers des décompositions équilibrées n'est cependant pas une idée sans avenir. En effet, on peut montrer que les décompositions optimales sont celles qui maximisent le nombre de 3 et ne comportent pas de 1. D'où le résultat :

- Pour $n = 3k$, la décomposition optimale est celle comportant k termes égaux à 3,
- Pour $n = 3k+1$ et $k>1$, il y a deux décompositions optimales : celle correspondant à (k-1) termes 3 et un terme 4 et celle comportant (k-1) termes 3 et deux termes 2

- Pour n = 3k+2, il y a une seule décomposition optimale : celle comportant k termes 3 et un terme 2.

Ce qui est intéressant dans ce problème, c'est que, même avec un bagage mathématique élémentaire, cette solution générale, non triviale mais facile à exprimer en langage ordinaire, peut émerger de la mise à l'épreuve des conjectures diverses émises par les élèves à partir de décompositions obtenues pour quelques nombres et de stratégies et généralisations issues d'améliorations locales des calculs. Ainsi, la conjecture du partage en deux peut être mise en défaut sur la composition 10 = 5+5 via la confrontation avec la décomposition : 10 = 5+3+2, mais le repérage de l'inégalité : 5<3x2 peut servir ensuite à décomposer systématiquement les 5 dans les décompositions déjà trouvées pour d'autres nombres et à conjecturer qu'une décomposition optimale ne peut comporter de 5. Ceci se généralise à tout nombre supérieur à 5 puisqu'un tel nombre est toujours susceptible d'un partage en deux ne comportant pas de 1. Il reste alors pour aboutir à découvrir que tout développement optimal comporte au plus un 4 puisque 4x4 < 3x3x2 et au plus deux 2 puisque 2x2x2 <3x3.
Les preuves correspondantes sont elles aussi accessibles avec un bagage modeste. Beaucoup s'appuient sur des inégalités spécifiques. Quant à la preuve du fait qu'une décomposition optimale ne peut comporter un nombre supérieur ou égal à 5, elle peut être obtenue, par exemple en comparant les découpages (n-2)x2 et n, soit par un calcul littéral simple (si l'on est au collège), soit par une visualisation géométrique de ce calcul, comme la suivante :



EXEMPLE 2 : APPROXIMATION DE NOMBRES PAR DES FRACTIONS

L'approximation des nombres via des développements décimaux ou des fractions est, on le sait, une mine de situations propices au calcul et à la découverte de régularités et résultats surprenants. Nous en proposons ci-après quelques exemples qui se veulent accessibles avec un bagage mathématique réduit, dès le collège pour la plupart d'entre eux.

Des décimaux aux fractions :

On sait bien sûr associer à tout écriture décimale ou même à tout développement décimal illimité périodique une fraction et mettre ensuite cette fraction sous forme irréductible, mais ceci ne donne pas nécessairement une fraction « simple », c'est à dire de petit dénominateur. De plus, on peut chercher à approcher par des fractions simples des irrationnels ou des nombres rationnels dont on a seulement une valeur approchée avec une certaine précision. Approcher des nombres par des fractions simples, c'est ce que l'on se propose de faire ou que l'on a besoin de faire dans les problèmes suivants. On le fera en utilisant deux techniques différentes : celle des tables de division et celle des développements en fractions continues[1].

[1] D'autres techniques sont bien sûr possibles, par exemple celle des suites de Farey. La suite de Farey d'ordre n, pour n entier ≥1, est la suite, ordonnée dans l'ordre croissant, des fractions p/q irréductibles qui vérifient 0≤p≤q≤n. On peut montrer, par des raisonnements arithmétiques de niveau terminale, que le successeur de p/q dans la suite est la fraction r/s telle que : rq-sp=1 et n-q≤s≤n et que pour trois termes sont consécutifs dans la même suite, la fraction médiane

Problème 1 : Dans une classe, le calcul du pourcentage de filles, arrondi à un chiffre après la virgule, est de 51.5%. Peut-on déterminer le nombre de filles et de garçons de la classe ?

Pour résoudre des problèmes de cette nature, une solution élémentaire consiste à se construire une table de division. Le pourcentage 51.5% apparaît ici une seule fois pour une taille de classe raisonnable : à l'intersection de la ligne 33 et de la colonne 17 (en fait 17/33 = 0,5151…). Bien sûr, la capacité de répondre à la question posée dépend du pourcentage choisi. Si l'on se fixe un pourcentage de 50%, par exemple, la réponse n'est pas unique. Le tableau de division, une fois construit, permet par exemple de déterminer quels pourcentages sont en fait possibles pour une classe entre 20 et 40 élèves et lesquels correspondent respectivement à une ou plusieurs compositions de classe, combien peut-on avoir au maximum de classes pour un même pourcentage (arrondi par exemple à un chiffre après la virgule, comme dans le cas ci-dessus).

Problème 2 : Ecrire 1,047 sous forme de fraction « parlante ».

Ce nombre ne tombe pas du ciel. On le trouve dans *l'Essai philosophique sur les probabilités* de Laplace et il y correspond au rapport : nombre de filles / nombre de garçons à la naissance. Laplace étudie les écarts à cette moyenne (à Paris, il est par exemple plus faible) et en tire des conséquences surprenantes sur les mœurs de l'époque.

Pour déterminer une fraction « parlante », on peut, comme dans le problème précédent utiliser une table de division. La première fraction proche trouvée est : 22/21 (en fait, 22/21 = 1,047619047619…). Ainsi donc, on dira qu'il naît 22 filles pour 21 garçons, façon plus « parlante », on en conviendra, d'exprimer le rapport que le décimal 1.047.
Mais on peut aussi écrire : 1,047 = 1+ 0,047 et chercher à approcher 0,047 par une fraction simple ; il suffira ensuite d'ajouter 1. Pour cela, puisque 0,047 est inférieur à 1, on peut chercher une approximation de la forme 1/n, ce qui conduit à chercher la partie entière de son inverse. Une calculatrice donne pour l'inverse : 21,27659574 que l'on approche par 21. D'où l'approximation : 1 + 1/21, soit 22/21 pour 1,047. On voit s'amorcer ici la technique du développement en fractions continues sur laquelle nous reviendrons un peu plus loin.

Problème 3 : Ecrire π sous forme de fraction « parlante ».

Si l'on s'appuie sur l'approximation de π fournie par une calculatrice scientifique : π = 3.141592654, en itérant la méthode précédente, on obtient successivement : 3+1/7 = 22/7, puis 333/106, puis 355/113... On peut, bien sûr, continuer. Pratiquement, on laisse les longs développements décimaux sur l'écran de la calculatrice et on se contente à chaque étape de soustraire la partie entière puis d'inverser. On fait ainsi apparaître la suite : 3, 7, 15, 1, 292,… On peut théoriquement continuer mais il faut s'interroger sur la fiabilité des résultats obtenus, vu la valeur approchée qui a servi à initialiser le calcul et les effets des erreurs d'arrondis. En fait, une calculatrice scientifique ordinaire donne correctement les dix premiers termes de cette suite puisque l'on obtient, après 292 : 1, 1, 1, 2, 1, 4 alors que la suite devrait être 1, 1, 1, 2, 1, 3. Elle permet donc d'atteindre les réduites successives, dans le développement en fractions continues, jusqu'à l'ordre 9. La neuvième réduite : 1146408/364913 fournit une approximation à l'ordre 10^{-11} mais la quatrième réduite : 355/113 fournit déjà une bonne approximation puisque 355/113 - π est voisin de : 3.10^{-7} .

dénote le même rationnel que la fraction obtenue en sommant respectivement les numérateurs et dénominateurs des fractions extrêmes. Dans le cas du problème 1 ci-après, on peut considérer la suite F40 et partir du terme ½ de cette suite pour obtenir la solution.

Cette même technique, utilisée pour π^4, conduit à la suite : 97, 2, 2, 3, 1, 16539 qui donne une approximation à 10^{-11}.

Problème 4 : Soit x>1. On pose x = [x] + (x) où [x] est la partie entière de x. Si (x) = 0, on s'arrête. Sinon on pose $x_1 = 1/(x)$ et on itère le processus, en s'arrêtant si un (x_n), pour n≥1, est entier. Montrer que le processus s'arrête si et seulement si x est un nombre rationnel.

Le rationnel x étant mis sous forme de fraction irréductible, on remarquera, pour montrer que le processus s'arrête nécessairement, qu'il conduit à effectuer des divisions euclidiennes successives avec des dividendes et diviseurs formant des suites strictement décroissantes. Le raisonnement associé au calcul met donc en jeu, comme c'est souvent le cas en arithmétique, le principe de descente infinie de Fermat.

Problème 5 :
Soit toujours x>1. La suite $a_0 = [x]$, $a_1 = [x_1]\ldots a_n = [x_n]$, finie ou infinie, caractérise x. C'est le développement en fraction continue[2] de x noté :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

ou, plus simplement : $x = (a_0, a_1,\ldots)$, dont nous avons calculé les premiers termes pour π. La calculatrice, en répétant les deux opérations : « soustraire la partie entière », « prendre l'inverse », permet de calculer très facilement les premiers termes de la suite $(a_0, a_1,\ldots)$ et donc d'explorer les développements en fraction continue de divers nombres, de faire des conjectures à leur propos, conjectures qu'il restera ensuite à démontrer. Les exemples qui suivent illustrent ceci. Il faut bien sûr être attentif aux erreurs d'arrondis et à leurs effets possibles, ce qui contribue à motiver le besoin de preuve.

Exemple 1 : Choisir deux nombres entiers p et q entre 100 et 1000, non tous deux pairs, ni tous deux multiples de 3, ni tous deux multiples de 5[3]. La calculatrice donne p/q sous forme d'un nombre décimal à dix chiffres. Calculer la suite (a_n) et retrouver ainsi p et q.

Si, par exemple, on choisit : p = 689 et q = 313, on obtient successivement, à la calculatrice, pour les a_i les valeurs suivantes : 2, 4, 1, 30 puis, en prenant l'inverse (x_4) = 2,000000045 qui correspond en fait à la valeur exacte : $x_4 = 2$. Les réduites successives associées sont : 2/1, 9/4, 11/5, 339/154 et 689/313.

Exemple 2 : Afficher à la calculatrice la suite correspondant à $\sqrt{2}$. Quelle conjecture faites-vous ? Essayer ensuite avec $\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{26}$. Conjecturer, de façon générale, la suite associée à $\sqrt{(n^2+1)}$ et démontrer cette conjecture.

La suite associée à $\sqrt{2}$ est : (1, 2 , 2 , ….) et de manière générale celle associée à $\sqrt{(n^2+1)}$ est : (n, 2n, 2n….). Ces conjectures se démontrent facilement en remarquant que pour un tel nombre x, on a :

$$x=[x]+\frac{1}{[x]+x}$$

Cette relation permet de plus de générer par itération, un grand nombre d'égalités satisfaites par ces racines.

---

[2] Pour une information détaillée sur les développements en fractions continues, consulter par exemple
[3] Ils ont alors de fortes chances d'être premiers entre eux, à savoir une probabilité voisine de : $\prod_{p \text{ premier} \geq 7}(1-1/p^2)$.

Exemple 3 : Idem avec $\sqrt{3}$, avec le nombre d'or : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Exemple 4 : Idem pour des nombres $\sqrt{(n^2+2)}$
Exemple 5 : Idem pour e, $\sqrt{e}$, et les racines nièmes successives de e.

Dans les exemples 3 et 4, les preuves des conjectures sont élémentaires car les périodes sont au plus égales à 2. Mais, même pour des racines de nombres simples, les périodes peuvent être plus élevées ce qui rend les vérifications des conjectures plus laborieuses. Par exemple, pour n=7, la période de $\sqrt{7}$ est de 4 et pour n=19, la période est de 6, le développement étant : (4, 2, 1, 3, 1, 2, 8, 2, 1, 3, 1, 2, 8…). Pour e et les racines énièmes de e, les développements ne sont plus périodiques mais les conjectures restent faciles. En revanche, les preuves ne sont cette fois-ci plus élémentaires[4].

EXEMPLE 3 : LES ORDRES DE GRANDEUR - DU TRES PETIT AU TRES GRAND

Les quelques exercices ci-après visent à illustrer le travail possible au niveau du collège sur la notion d'ordre de grandeur, en exploitant les puissances de 10. Les premiers visent l'articulation avec les autres disciplines scientifiques, essentielle dans ce domaine[5] ; les derniers sont internes aux mathématiques et visent une utilisation raisonnée des calculatrices dans le travail avec les grands et petits nombres.

Calculs et ordres de grandeur : du très petit au très grand

Evaluer des ordres de grandeurs :

des longueurs :

Quel est l'ordre de grandeur des longueurs suivantes : le rayon d'un proton, d'un atome d'hydrogène, d'une molécule d'eau, d'une balle de tennis, la distance Dunkerque-Nice, le rayon de la terre, la distance terre-lune, la distance terre-soleil, le rayon de notre galaxie ?

des masses :

Quel est l'ordre de grandeur des masses suivantes : la masse d'un électron, d'une bicyclette, d'une moto, d'une voiture de tourisme, d'un camion, d'un airbus A380, d'un atome d'oxygène, d'une goutte d'eau, d'un grain de riz, de la terre, de la lune, du soleil ?

Etablir des rapports entre grandeurs, changer d'unités, de dimension :

- Combien y-a-t-il de molécules d'eau dans une goutte d'eau ? Y en a-t-il beaucoup plus, beaucoup moins que de gouttes d'eau dans la mer Méditerranée ? (on pourra considérer pour faire le calcul que la goutte d'eau a 1mm de diamètre, que la surface de la mer Méditerranée est d'environ 2,5 millions de km^2 et sa profondeur moyenne de 1500m ; on rappelle que la masse molaire de l'eau, c'est à dire la masse de N molécules d'eau, N étant le nombre d'Avogadro ($N \approx 6,0210^{23}$) est de 18g).
- Combien faudrait-il d'éoliennes de puissance 0,7MW pour produire la même électricité qu'un réacteur nucléaire de puissance 1000MW ? Quelle surface de panneaux solaires semi-conducteurs

[4] Pour plus de détail, on pourra se référer à l'ouvrage de Heath : History of Greek Mathematics [2], ou à l'article de J.P. Kahane paru en 1984 dans la revue l'Enseignement Mathématique [3]. Le développement en fractions continues de réels et de e en particulier était par ailleurs le thème de la seconde composition du CAPES interne 1990.

[5] De nombreux autres exemples sont fournis dans le document d'accompagnement des programmes de sciences physiques pour la classe de seconde (www. eduscol.education.fr) ; on pourra aussi consulter les actes en ligne de l'Ecole d'Eté de Physique : e2phy.in2p3.fr) pour tout ce qui concerne les grandeurs liées à l'énergie.

faudrait-il pour produire en moyenne journalière par effet voltaïque cette puissance, la puissance moyenne journalière d'1m^2 de panneau solaire étant d'environ 35W ? Si l'on considère une centrale hydroélectrique fonctionnant avec une chute d'eau d'une hauteur de 100m (respectivement de 1000m), à quel débit cela correspond-t-il ?

- Combien s'est-il écoulé de secondes depuis le big-bang si celui-ci s'est produit il y a environ 15 milliards d'années ?
- Si l'on décidait de faire une maquette du système solaire à l'échelle qui tienne sur une plaque de 1mx1m, quelles dimensions faudrait-il prendre pour les différents astres et pour leurs orbites ? Qu'en pensez-vous ?

- Quelle longueur serait atteinte si l'on alignait les atomes d'un cube de fer de 1mm de côté, en respectant la distance inter-atomique ? Comparer à la distance terre-lune, à la distance terre-soleil (on supposera pour calculer la distance inter-atomique à partir de la masse atomique, c'est à dire la masse de N atomes : 55, 847g et de la masse volumique : 7,9.10^{3}kg/m^3 du fer que les atomes sont répartis suivant un réseau cubique).
- A votre avis, si l'on cherchait à enfermer l'humanité tout entière dans un gigantesque cube, quelle serait au minimum sa taille : 100m ? 1km ? 10km ? 100km ? 1000km ? Plus ? Et si on cherchait à enfermer toute l'humanité dans un carré, à raison d'1m^2 par individu, quelle serait la taille de ce carré ? Et si, inversement, on répartissait l'humanité régulièrement sur l'espace des terres émergées, soit environ 510 millions de km^2, de quel espace disposerait chaque individu ?

L'ensemble des nombres réels est archimédien : étant donnés deux nombres positifs a et b, a non nul, il existe toujours un N tel que Na>b, mais si a est très petit et b ne l'est pas, un tel N est forcément très grand. Prendre conscience de ce jeu entre « très grand » et « très petit » sous-jacent aux phénomènes qui se produisent à notre échelle est, comme le montrent les exemples précédents, essentiel.
Ecrire un nombre sous la forme Ne avec N très grand et e très petit et jouer sur les ordres de grandeur de N et e, a aussi été une technique utilisée historiquement pour obtenir des résultats de calcul différentiel et intégral. C'est en particulier ainsi qu'Euler a obtenu le développement en série de a^x et log(1+x)[6]. Cette technique est aujourd'hui exploitée, de façon tout à fait rigoureuse, par les mathématiciens qui utilisent l'analyse non standard [4].

<u>S'interroger sur des approximations :</u>
Le parsec et l'année lumière sont des unités de distance. L'année lumière est la distance parcourue par la lumière dans le vide en un an (la vitesse de la lumière dans le vide est de 300000km/s). Le parsec est la distance à laquelle l'orbite de la terre autour du soleil est vue sous un angle d'une seconde. Cette distance vaut environ 3,26 années lumières.
Dans certains ouvrages, on trouve écrit que le diamètre de notre galaxie est d'environ : 30 000 parsecs, dans d'autres que c'est environ 100 000 années lumières. Quelle est en années lumières la différence entre ces deux estimations ? Peut-elle être qualifiée de petite ?

Calcul, raisonnement et calculatrices : le défi des puissances !

[6] Dans *l'Introductio in Analysin Infinitorum* paru en 1748 (p. 85-90), Euler, après avoir remarqué que a^ω est de la forme (1+kω), k étant un réel pour ω infiniment petit, pour obtenir le développement de a^z pose z=iω, avec i infiniment grand et écrit $a^z=(1+k\omega)^i$. Il développe ensuite classiquement cette expression puis égale tous les quotients de la forme (i-p)/i à 1 en arguant du fait que i est infiniment grand, obtenant ainsi le développement usuel de a^z.

Ce défi, proposé à des élèves de début de collège, nous semble un problème intéressant pour articuler raisonnement et travail avec calculatrice et illustrer l'intérêt de décomposer les nombres et de jouer sur les propriétés des opérations pour obtenir, dans un calcul instrumenté, des résultats numériques que leurs calculatrices ne peuvent afficher directement.

Le problème posé est le suivant :

Calculer exactement le plus grand nombre possible de puissances de 7

Ce défi, après une introduction en classe, peut vivre sur une certaine durée, avant de faire l'objet d'un travail de synthèse en classe, la progression des résultats et stratégies étant assurée par exemple par voie d'affiche dans la classe. Les élèves peuvent utiliser librement leur calculatrice mais, quel que soit le modèle de calculatrice scientifique, même si on arrive à aller un peu plus loin que ce qui est immédiatement accessible, en utilisant les chiffres cachés de la calculatrice, on finit par dépasser les potentialités de la machine. C'est dans la recherche de stratégies permettant de dépasser les limites de la machine que le travail mathématique prend son intérêt.

Calcul et grands nombres : les puissances de 10

Ce problème, avec divers autres, a été conçu à l'IREM de Strasbourg [4]. Il mobilise le calcul avec des puissances de dix pour comparer de grands nombres qui sont tous du même ordre de grandeur. Ces nombres sont aussi choisis pour que le résultat ne soit pas immédiatement accessible avec une calculatrice scientifique mais, indépendamment de cela, le fait de pouvoir ordonner ces grands nombres sans recourir à la calculatrice peut être en soi une motivation suffisante .

Les nombres à comparer sont les suivants :
A = 999 999 999 999 × 999 999 999 999
B = 999 999 × 999 999 × 999 999 × 999 999
C = 999 999 999 999 999 999 × 999 999

L'ordre de grandeur des trois nombres est 10^{24}. Une calculatrice scientifique ou graphique où les entrées sont limitées à 10 chiffres ne permet directement que de poser le calcul de B pour lequel elle donne le résultat : 9.99996 E23. L'utiliser pour comparer les nombres va donc nécessiter des détours et il est clair que le calcul à la main via les puissances de 10 est ici particulièrement performant, comme le montrent les solutions d'élèves que nous avons reproduites. Une calculatrice formelle, comme la TI89, en mode approché, affiche, pour ces trois calculs, les résultats suivants : 1.E 24, 9.99996 E23 et 9.99999 E23. Son utilisation est ici bien sûr à éviter.

Exemples de solutions données par des élèves :

1. $A = (10^{12} - 1)^2 = 10^{24} - 2\times10^{12} + 1$
   $B = (10^6 - 1)^2\times(10^6 - 1)^2 = 10^{24} - 4\times10^{18} + 6\times10^{12} - 4\times10^6 + 1$
   $C = (10^{18} - 1)\times(10^6 - 1) = 10^{24} - 10^{18} - 10^6 + 1$
   $A - C = 10^{18} - 2\times10^{12} + 10^6 = 10^6\times(10^{12} - 2\times10^6 + 1) = 10^6\times(10^6 - 1)^2 > 0$ d'où $A > C$
   $C - B = 3\times10^{18} - 6\times10^{12} + 3\times10^6 = 3\times10^6\times(10^6 - 1)^2 > 0$ d'où $C > B$
   Conclusion : $B < C < A$
2. En posant $\alpha = 999\,999$,
   $A = (\alpha\times10^6 + \alpha)^2 = \alpha^2\times(10^6 + 1)^2 = \alpha^2\times(\boxed{10^{12} + 1} + 2\times10^6)$

$B = \alpha^4 = \alpha^2\times(10^6 - 1)^2 = \alpha^2\times(\boxed{10^{12} + 1} - 2\times10^6)$

$C = (\alpha\times10^{12} + \alpha\times10^6 + \alpha)\times\alpha = \alpha^2\times(\boxed{10^{12} + 1} + 10^6)$

Or : $-2\times10^6 < 10^6 < 2\times10^6$…

EXEMPLE 4 : CALCUL ET RECONNAISSANCES DE FORMES, DECOMPOSITIONS ET RECOMPOSITIONS

Calcul et reconnaissance de formes : un résultat surprenant !

Le calcul demandé ici, du niveau du collège, nous semble bien illustrer le rôle joué dans le pilotage du calcul par la reconnaissance de formes (ici des identités remarquables) et la recherche d'associations et regroupements efficaces. Il illustre aussi la motivation que peut apporter au calcul le fait d'obtenir un résultat étrange par rapport aux attentes.

La question posée est la suivante :

> On considère l'expression $1 \bigcirc \sqrt{2} \triangle \sqrt{3} \square \sqrt{5}$. En remplaçant chacun des signes $\bigcirc$, $\triangle$, $\square$ par les signes + ou −, déterminer toutes les expressions possibles puis calculer leur produit.

La combinatoire des possibles conduit ici à calculer un produit de 8 facteurs. Si l'on utilise une calculatrice, on trouve le résultat suivant : $P = -71$**.** Trouver un nombre entier dans ce calcul complexe impliquant des radicaux surprend plus d'un élève et ils se demandent alors si leur calculatrice ne leur a pas joué, à nouveau, un mauvais tour... D'où une curiosité et une motivation certaines pour se lancer dans un calcul à la main.

Décomposition et recomposition de nombres : les nombres de Fermat

Le texte ci-après est celui d'une fiche conçue pour des élèves de terminale S[7]*. Le problème posé, outre son intérêt historique, nous semble particulièrement intéressant pour illustrer le jeu de décomposition et recomposition de nombres que met en jeu le calcul en arithmétique.*

> Les nombres de Fermat sont définis pour $n \in$ Z par $F_n = 2^{(2^n)} + 1$.
>
> **1°** Donner une estimation du nombre de chiffres de F_{10}.
>
> **2°** Déterminer F_0 , F_1 , F_2 , F_3 et F_4 .
>
> **3°** Fermat croyait, à tort, que les nombres F_n étaient tous des nombres premiers (un nombre premier est un nombre entier admettant exactement deux diviseurs : 1 et lui même). Mais Euler montra en 1732 que F_5 était divisible par 641 en utilisant le fait que 16 est égal à 641 moins une puissance de 5 et la décomposition de 640 en un produit de facteurs premiers…
>
> Essayer de retrouver la démonstration d'Euler (à l'époque il ne disposait pas de calculatrice !).

La réponse à la première question mobilise l'approximation particulièrement utile $2^{10} \approx 10^3$:
Alors $F_{10} \approx 2^{1000}$ c'est à dire $F_{10} \approx (2^{10})^{100} \approx (10^3)^{100}$ donc ce nombre a environ 300 chiffres.

Pour la question 3, une solution possible trouvée par des élèves est la suivante :

$2^{32} = 16\times2^{28}$, or $5^4 = 625 = 641 - 16$

[7] Une copie détaillée d'élève est disponible sur le site de l'APMEP de Strasbourg : www.apmep.asso.fr/OPTSci1.html

d'où $2^{32} = (641 - 5^4)\times 2^{28} = 641\times 2^{28} - (5\times 2^7)^4 = 641\times 2^{28} - (641 - 1)^4$
En décomposant $(641 - 1)^4$ en produit de deux carrés et en développant, on finit par arriver à
$2^{32} = 641q-1$ c'est à dire au fait que F_5 est divisible par 641.

Remarque : Le calcul mené ci-dessus est relativement laborieux et il peut être tout à fait intéressant de comparer cette solution avec une solution utilisant les congruences. Les deux décompositions suivantes de 641 : 641 = 640+1 et 641 = 625+16 conduisent aux deux relations de congruence :
$5\times 2^7 \equiv -1$ (641) et $5^4 \equiv -2^4$ (641).
On en déduit que : $5^4\times 2^{28} \equiv 1$ (641) et donc que : $2^{32} \equiv -1$ (641). F_5 est bien divisible par 641.

EXEMPLE 5 : TRAVAILLER AVEC DES FORMULES

La formule de Héron pour l'aire d'un triangle

Voici une autre fiche proposée à des élèves de première S, concernant cette fois un travail sur des formules. Il nous semble bien illustrer le fait que le travail sur des formules, même a priori données, peut mobiliser l'intelligence du calcul, et montrer également qu'une certaine complexité, nécessaire pour sortir du cadre des calculs routiniers, est accessible aux élèves actuels, si elle est bien sûr adéquatement amenée et gérée par l'enseignant.

Les longueurs a, b, c des trois côtés d'un triangle étant données, ce triangle est déterminé à une isométrie près, donc son périmètre et son aire le sont. Il est facile de calculer son périmètre en fonction de a, b et c. Peut-on, de la même façon, trouver une formule permettant de calculer l'aire A du triangle l'aire A en fonction de a, b et c ?

Un essai avec le cercle inscrit au triangle fait bien intervenir la longueur des trois côtés mais il reste un intrus, le rayon r du cercle inscrit, puisque l'on obtient $\mathsf{A} = \frac{P}{2} \times r = p \times r$ où p est le demi-périmètre du triangle…

➯ **Démontrer ce résultat**.

Il y a bien la fameuse formule « *Base* × *hauteur* / 2 » en privilégiant l'un des côtés, à condition de pouvoir exprimer la hauteur correspondante en fonction de la longueur des trois côtés… C'est ce qu'a réussi le mathématicien grec Héron (1er siècle après J.-C.) en démontrant la formule suivante :

$$\mathsf{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

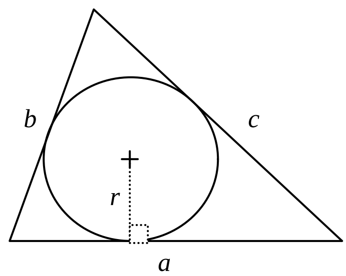
1° Vérifier cette formule dans le cas particulier :

a) d'un triangle équilatéral,

b) d'un triangle rectangle isocèle,

c) d'un triangle isocèle non rectangle,

d) d'un triangle rectangle non isocèle.



2° Étude du cas d'un triangle quelconque :

Calculer l'aire d'un triangle quelconque en fonction de la longueur de ses trois côtés puis montrer que l'on peut se ramener à la formule de Héron…

Le travail sur cette formule, dans les quatre cas particuliers de la première question, n'est qu'un travail de vérification. Pourtant il demande une réelle "intelligence" des calculs comme on peut le voir par les indications ci-dessous. L'étude ensuite du cas du triangle quelconque a été généralement proposée dans les classes à titre de recherche personnelle.

1° a) cas d'un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur a : $\mathsf{A} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Avec $p = \frac{3a}{2}$, on a $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \mathsf{A}$.

b) cas d'un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse de longueur b et ayant deux côtés de longueur a :

$\mathsf{A} = \frac{a^2}{2}$. Avec $p = \frac{2a+b}{2}$ et $b = a\sqrt{2}$, on a :

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{2a^4(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{16}} = \sqrt{\frac{a^4}{4}} = \mathsf{A}.$$

c) cas d'un triangle isocèle non rectangle dont la base a pour longueur b et ayant deux côtés de longueur a : $\mathsf{A} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}$.

Avec $p = \frac{2a+b}{2}$, on a

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{2a+b}{2} \times \frac{b}{2} \times \frac{b}{2} \times \frac{2a-b}{2}} = \sqrt{\frac{b^2(4a^2-b^2)}{16}} = \mathsf{A}.$$

d) cas d'un triangle rectangle non isocèle d'hypoténuse de longueur $b = \sqrt{a^2 + c^2}$: $\mathsf{A} = \frac{ac}{2}$.

Avec $p = \frac{a+b+c}{2}$, on a $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ =

$$\sqrt{\frac{a+b+c}{2} \times \frac{b+c-a}{2} \times \frac{a+c-b}{2} \times \frac{a+b-c}{2}} = \sqrt{\frac{[(a+c)^2 - b^2][2\mathrm{ac} + \mathrm{b}^2 - c^2 - a^2]}{16}} = \ldots$$

2° Soit h est la longueur de la hauteur issue de A. Que l'angle en B soit aigu ou obtus, en appliquant le théorème de Pythagore à deux reprises, on démontre que $h^2 = b^2 - \left(\frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right)^2$ et c'est là que commencent diverses transformations d'écritures qui n'ont rien de 'mécanique' :

$$h^2 = \frac{[2ab - (b^2 + a^2 - c^2)][2ab + b^2 + a^2 - c^2]}{4\mathrm{a}^2} = \frac{[c^2 - (a^2 + b^2 - 2ab)][(a+b)^2 - c^2]}{4\mathrm{a}^2} = \ldots$$

Calculs et moyennes : le problème des vitesses

Le mot moyenne renvoie pour la plupart d'entre nous et pour les élèves à la notion de moyenne arithmétique. La situation suivante, exploitable à partir de la fin du collège, est un moyen de questionner ce rapprochement automatique et de montrer aussi le pouvoir d'explication d'un calcul littéral[8].

Un cycliste monte un col à la vitesse de 15km/h. Arrivé au sommet, peu satisfait de cette performance, il décide d'accélérer dans la descente pour doubler sa vitesse moyenne sur le trajet aller-retour. Sachant qu'il redescend par le même chemin, à quelle vitesse doit-il rouler pour cela dans la descente : 45km/h, 60km/h, 90km/h, plus ?

Avec beaucoup d'élèves, un premier problème se pose : peut-on répondre à cette question sans savoir combien de kilomètres ont été exactement parcourus ? Il faut donc déjà se persuader que la vitesse

[8] Cette situation a d'abord été posée sous cette forme par Marc Legrand et il l'a exploitée à différents niveaux d'enseignement. On trouvera une étude détaillée incluant des compte-rendus d'expérimentation en classe réalisée par Hélène di Martino sur le site le l'IREM de Grenoble : www.ac-grenoble.fr/irem

moyenne aller-retour est indépendante de la distance parcourue. Ensuite la réponse spontanée est bien sûr la première valeur proposée puisque 30 est la moyenne arithmétique de 15 et 45.
Il est intéressant ici de ne pas forcer trop tôt l'intervention du cadre algébrique. Faisant les calculs avec 45km/h, les élèves s'aperçoivent que la vitesse moyenne est inférieure à la valeur prévue, ils essaient alors différentes valeurs plus grandes, et perçoivent progressivement que, même si la vitesse moyenne augmente, on gagne de moins en moins à accélérer dans la descente, une limite se dessine qui semble justement de l'ordre de la valeur cherchée. Le calcul algébrique permet définitivement de trancher et aussi de comprendre ce qui faisait obstacle. Lorsque la formule donnant la vitesse moyenne en fonction des vitesses aller et retour est écrite, de façon symétrique, sous la forme :

$$\frac{1}{Var}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Va}+\frac{1}{Vr}\right)$$

on comprend bien qu'il y avait une moyenne arithmétique mais portant sur les inverses, soit une moyenne harmonique[9].

EXEMPLE 6 : VARIATIONS ET JEUX DE CADRES DANS LE CALCUL FONCTIONNEL

Le problème du quadrilatère qui tourne

Ce problème a été à l'origine proposé par l'IREM de Lyon pour des activités sur les fonctions au niveau seconde [6]. Il nous semble particulièrement intéressant par les possibilités d'interaction qu'il offre entre géométrie et calcul fonctionnel, par les raisonnements qui sous-tendent le pilotage de la preuve algébrique, et aussi par la possibilité de généralisation qu'il offre, montrant bien le rôle que va jouer, dans de telles généralisations, l'introduction de paramètres.

Le problème initial est le suivant :

On considère un rectangle ABCD avec AB = 6 cm et BC = 9cm, M sur [A,B], N sur [B,C], O sur [C,D] et P sur [D,A] tels que AM = BN = CO = DP. Comment varie l'aire du quadrilatère MNOP lorsque M se déplace sur [A,B] ? Quelle est sa valeur minimale ? Quand l'obtient-on ?

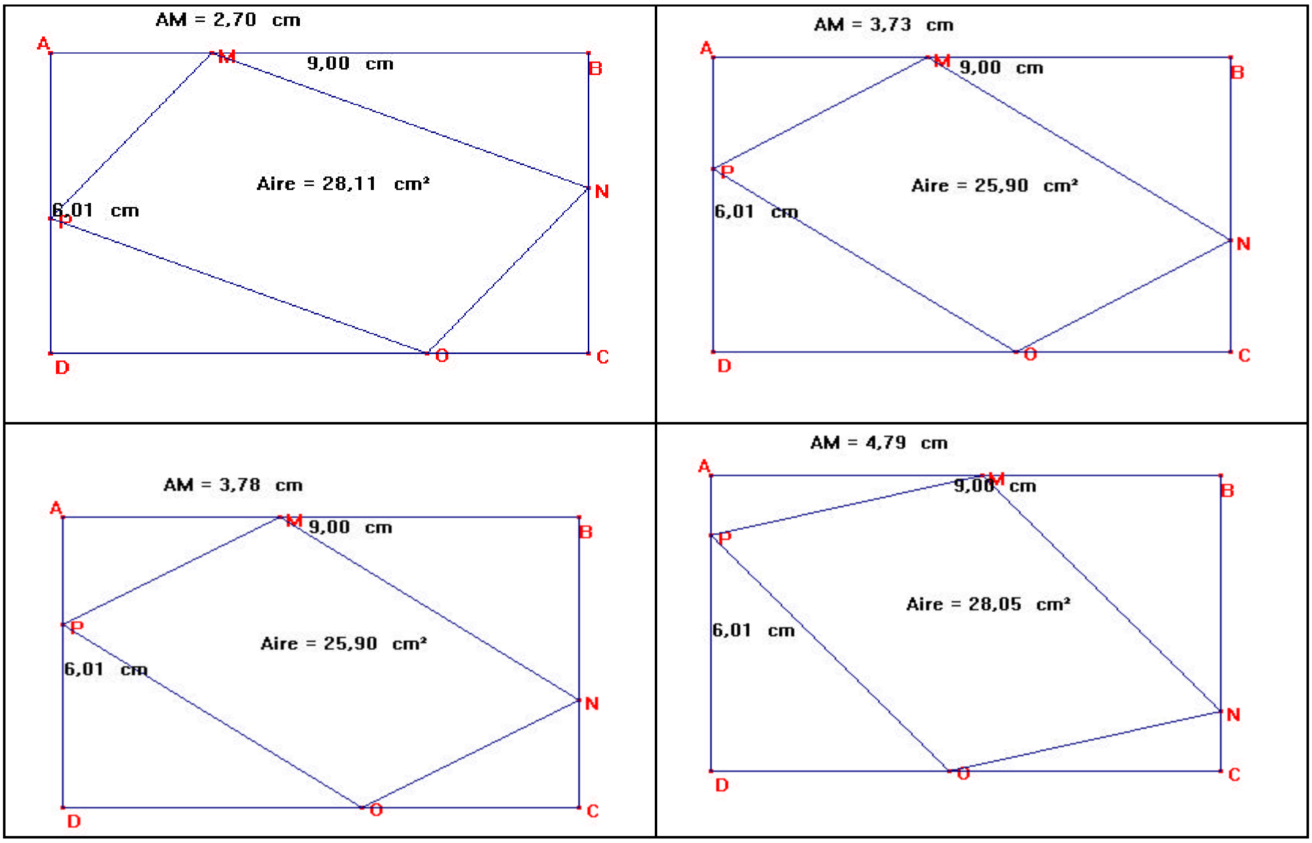
Et il nous semble intéressant de le prolonger par la question suivante :

Le résultat obtenu se généralise-t-il à un rectangle quelconque ?

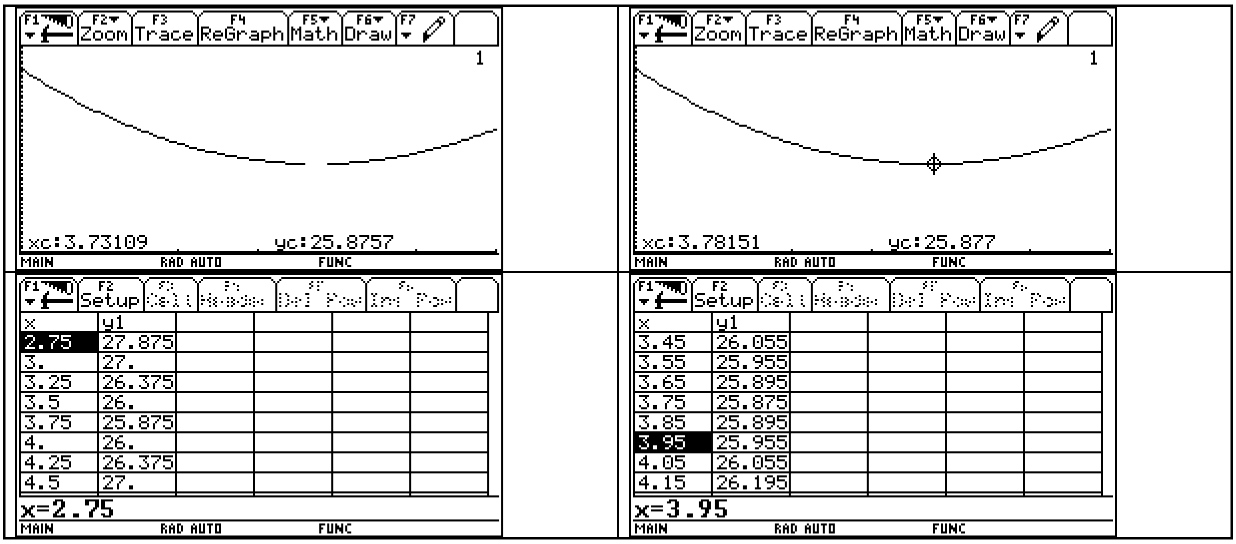
Une exploration géométrique réalisée par exemple avec un logiciel de géométrie dynamique permet d'anticiper les variations et aussi de montrer aux élèves que les conjectures qu'ils ont tendance à faire sur le minimum (ils pensent d'abord qu'il correspond à une position remarquable comme M au milieu de [A,B]) sont erronées. En revanche, la longueur de AM correspondant au minimum semble quand même reliée aux dimensions de la figue : elle semble en effet proche de 3,75 cm qui correspond au quart du périmètre.

---

[9] Un raisonnement très simple permet de répondre à la question posée sans le moindre calcul : si le cycliste veut doubler sa vitesse, il doit mettre pour l'aller-retour le temps mis à la montée, donc en haut du col il devrait déjà être en bas, mais il est très rare que ce raisonnement soit spontanément proposé et, s'il est proposé, qu'il convainque d'emblée les élèves.



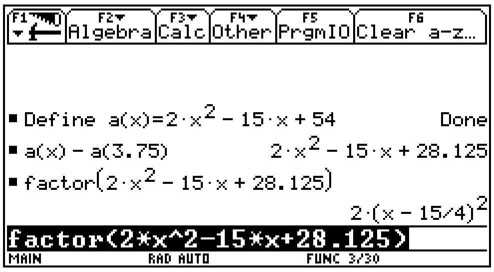
L'algèbre permet de modéliser la situation, de l'explorer graphiquement via un tracé fonctionnel, ce qui confirme la conjecture issue de l'exploration géométrique.



Mais l'algèbre permet aussi de prouver cette conjecture. En effet, si on note x la longueur de AM, l'aire A(x) qui se calcule aisément par différence (stratégie souvent peu naturelle aux élèves qui veulent utiliser une formule) est égale à : $2x^2 - 15x + 54$. Prouver que le minimum est atteint pour 3,75 revient à prouver que A(x)-A(3,75) est toujours positif. On ne s'étonnera donc pas de tomber sur une expression de la forme $k(x-3{,}75)^2$ avec k>0 ![10] Des problèmes de variation comme celui-là, où l'on peut conjecturer la valeur exacte du ou des extrema cherchés nous semblent particulièrement intéressants à ce niveau d'enseignement où l'on ne dispose pas encore des outils de l'analyse pour l'étude des variations. Ils

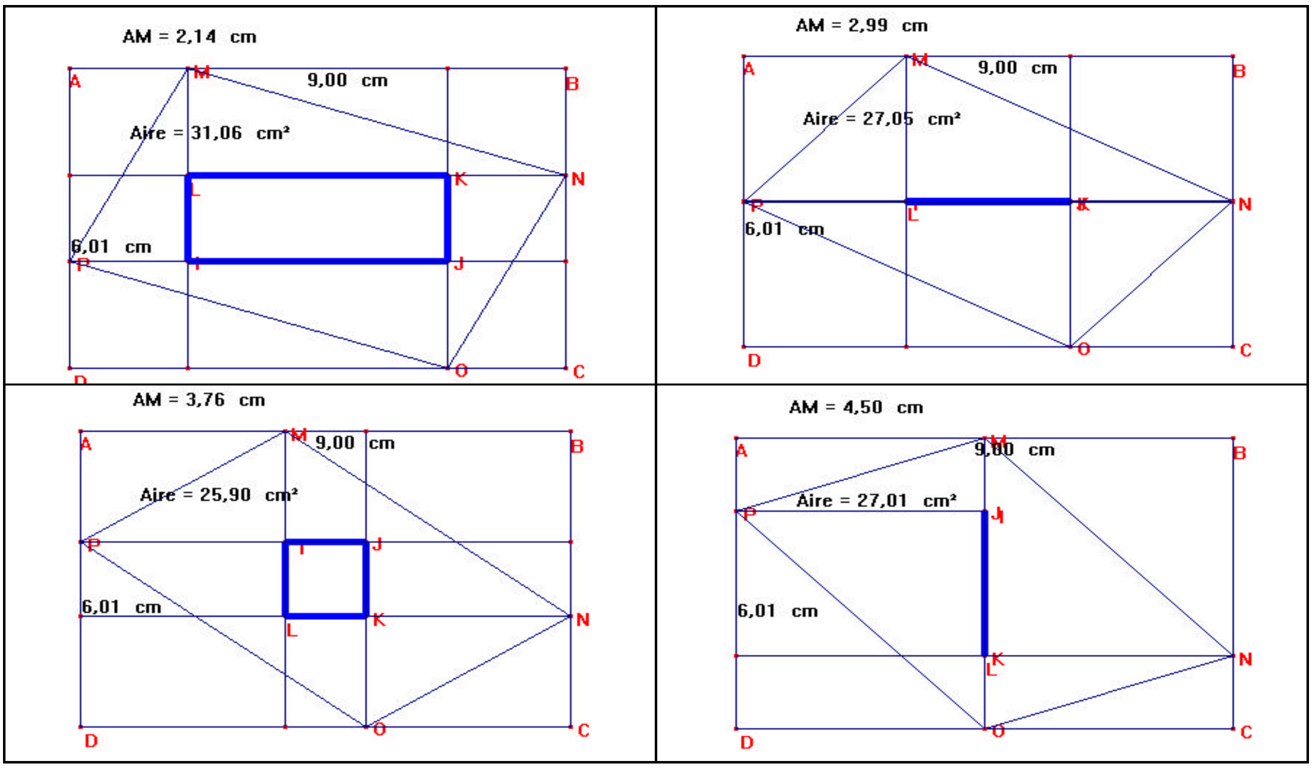
[10] Il est frappant de voir qu'autant les enseignants pensent en termes de forme canonique (ce qui marche ici puisque l'expression est du second degré), autant la stratégie évoquée ici leur semble peu naturelle, les PLC2 en formation ont d'ailleurs souvent du mal à anticiper la forme nécessaire du résultat de ce calcul !

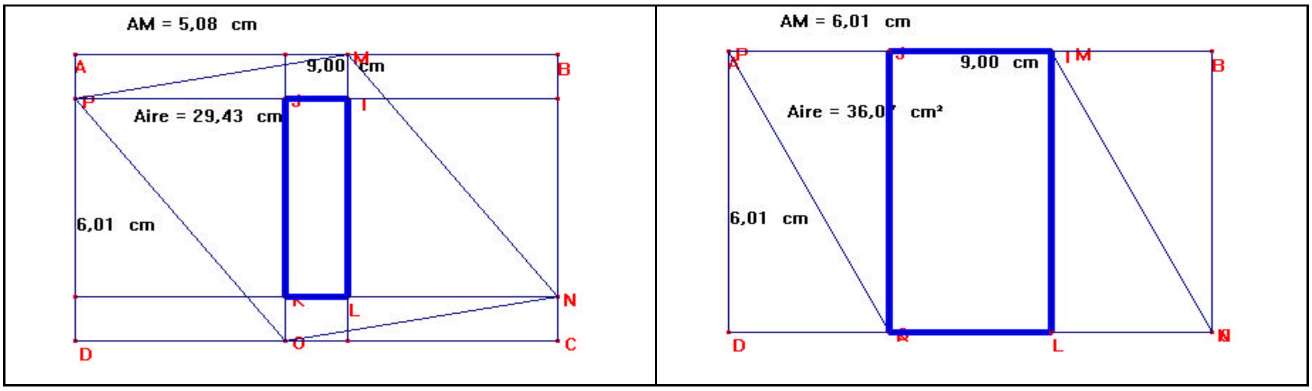
permettent de clore l'étude du problème sur une véritable preuve, même si celle-ci est guidée par l'enseignant et éventuellement assistée par des instruments de calcul formel, comme cela a été le cas dans certaines expérimentations.



En introduisant des paramètres, on peut justifier, en adaptant le calcul, que le minimum cherché est bien atteint pour le quart du périmètre dans tous les cas (si bien sûr cette valeur est moindre que la largeur du rectangle). Mais on peut aussi obtenir ce résultat géométriquement, comme nous le montrons ci-après.

Minimiser l'aire du parallélogramme revient à maximiser la somme des aires des quatre rectangles entourant le rectangle IJKL de la figure ci-après, donc à minimiser celle du rectangle IJKL qui représente la différence avec l'aire du rectangle ABCD. Lorsque AM = BC/2, l'aire de IJKL est nulle. La différence avec l'aire du rectangle ABCD devient alors négative et elle est minimum lorsque IJKL est un carré puisque le périmètre de IJKL est alors constant. Ceci est atteint pour AM= (AB+BC)/4. Ensuite l'aire recommence à croître. Elle s'annule à nouveau pour AM=AB/2 puis redevient positive.





Cette démonstration géométrique, que les élèves peuvent suivre, si elle est ainsi dynamiquement illustrée avec un logiciel, à défaut de pouvoir l'inventer, a aussi le mérite de restituer leur particularité vis à vis du problème posé aux deux valeurs particulières conjecturées initialement comme correspondant au minimum : pour ces deux valeurs, l'aire du rectangle intérieur s'annule.

La problème de la bille

Comme le précédent, ce problème va se modéliser dans le cadre fonctionnel et illustre les interactions possibles entre différents points de vue dans la résolution d'un problème. Il présente aussi l'intérêt que des preuves algébriques soient possibles, à condition de raisonner le calcul et que l'étude mathématique de la variation mette en défaut l'intuition de la grande majorité des élèves. Ceci nous semble propice à susciter le désir de dépasser le cadre de la seule situation particulière étudiée et à motiver l'étude d'un problème plus général via l'introduction de paramètres.

Le problème posé, inspiré d'un exercice du manuel Terracher de première S, est le suivant :

Au fond d'un cylindre à base circulaire de 10 cm de rayon et de grande hauteur, repose une bille de 8cm de rayon que l'on recouvre d'eau jusqu'à affleurement. On enlève la bille et on la remplace par une bille de rayon x cm, la quantité d'eau dans le cylindre restant la même.
En supposant que les billes reposent toutes sur le fond du cylindre, que se passe-t-il suivant les valeurs de x ? La bille reste-t-elle sous l'eau, affleure-t-elle, émerge-t-elle ?
Que se passe-t-il si, au départ, la bille a maintenant 3 cm de rayon ? Et si la bille a r cm de rayon ?

Un compte-rendu détaillé d'expérimentation en classe de première S est fourni dans [7] et nous y renvoyons le lecteur.

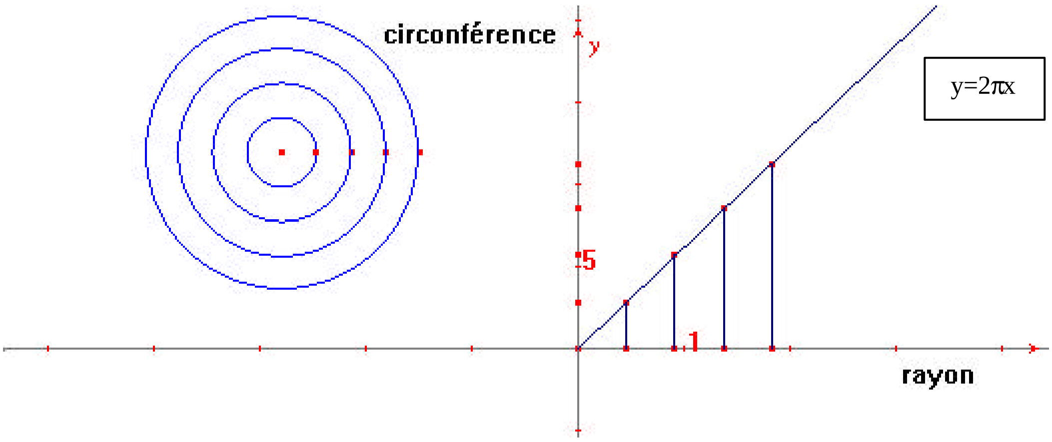
EXEMPLE 7 : DIFFERENTS POINTS DE VUE DANS LE CALCUL INTEGRAL

Nous avons, dans le rapport, souligné la nécessité de trouver les moyens d'articuler assez tôt les deux points de vue sur la notion d'intégrale : le point de vue «primitive » et le point de vue « somme ». Nous proposons ici deux situations pour favoriser cette articulation.
Elles s'adressent à des élèves de lycée et visent à donner sens à des calculs comme ceux évoqués dans le rapport à propos du calcul du moment d'inertie d'un disque homogène.

L'aire du disque revisitée :

Les formules de l'aire du disque et du périmètre du cercle sont supposées connues. Il s'agit de voir sous un autre angle les relations entre ces deux formules.

Le disque peut être vu comme la réunion de couronnes circulaires. Une couronne comprise entre les rayons r et r+Δr, a une aire égale à : $\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2$, soit : $2\pi r\,\Delta r+\pi(\Delta r)^2$.
En prenant la limite du quotient par Δr, on a une première interprétation : la dérivée de l'aire d'un disque de rayon r, considérée comme fonction de r, est le perimètre du cercle qui est la frontière de ce disque (ce que l'on pouvait bien sûr obtenir directement en dérivant la fonction : $r\to \pi r^2$). Mais une deuxième interprétation est que l'aire de la couronne est celle d'un trapèze rectangle de bases 2πr et 2π(r+Δr) et de hauteur Δr. L'aire du disque est celle de la réunion de toutes ces couronnes et ce n'est autre que l'aire comprise entre la droite d'équation y=2πx et les droites d'équation x=0 et x=R, correspondant à celle de la réunion des trapèzes. On retrouve, sous une représentation graphique plus habituelle, le lien connu entre aire et primitive.



On peut aussi, pour Δr petit, approcher l'aire de la couronne par celle d'un rectangle de longueur 2πr et de largeur Δr. Si l'on transpose alors graphiquement, comme on l'a fait pour les trapèzes, on retrouve l'approximation de l'intégrale : $\int_0^R 2prdr$ par la somme des aires de rectangles. Sur chaque intervalle de largeur Δr, la fonction $x\to 2\pi x$ a été approchée par une fonction constante.

Un calcul de moment d'inertie :

Le moment d'inertie d'un point matériel de masse m situé à la distance r d'un point O ou d'un axe Δ par rapport à ce point ou cet axe est : mr^2. Les moments d'inertie étant additifs, le moment d'un système de N points par rapport à O ou Δ est la somme des moments d'inertie de chacun des points du système. Comment calculer à partir de ceci le moment d'inertie I_0 d'un solide quelconque par rapport à O ou Δ ?
On supposera, au vu de ce qui précède, que :

1) les moments sont additifs, c'est à dire que si deux solides S_1 et S_2 sont disjoints, le moment d'inertie du système qu'ils constituent : $I_0(\{S_1,S_2\})$ est égal à $I_0(S_1) + I_0(S_2)$,
2) les moments sont croissants par rapport à la distance, c'est à dire que si le solide S de masse M est situé entre les distances r et R de O (ou de Δ), son moment d'inertie vérifie la double inégalité : $Mr^2 \leq I_0(S) \leq MR^2$.

Ceci conduit à penser le moment d'inertie d'un solide comme somme des contributions de parties « à égale distance » de O ou Δ.

Prenons l'exemple d'un disque plat homogène de rayon R et de masse M et du calcul de son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ perpendiculaire au plan du disque en son centre.
On décompose le disque en couronnes d'épaisseur Δr. La contribution à l'inertie ΔIr de la couronne Cr comprise entre les rayons r et r +Δr vérifie : $\mu\, r^2.\ \text{Aire}\,(Cr) \leq \Delta Ir \leq \mu\,(r+\Delta r)^2.\ \text{Aire}\,(Cr)$.

A partir de ce point, comme dans la situation précédente, deux points de vue sont possibles :

Le point de vue « différentiel » : on considère le moment d'inertie comme une fonction du rayon : $r \rightarrow I(r)$. La double inégalité qui précède se lit :

$$\frac{1}{\Delta r}\mu\, r^2.\text{ Aire (Cr)} \leq \frac{I(r+\Delta r)-I(r)}{\Delta r} \leq \frac{1}{\Delta r}\mu\,(r+\Delta r)^2.\text{ Aire (Cr)}$$

Lorsque Δr tend vers 0, les deux termes extrêmes de la double inégalité ont la même limite : $2\pi\mu\, r^3$ donc la fonction I est dérivable de dérivée $I'(r) = 2\pi\mu\, r^3$ et I'(r) est la primitive de I'(r) qui s'annule pour r=0, soit : $I(r) = \pi\mu\, r^4/2$ et $I(R) = \pi\mu\, R^4/2$ soit : $MR^2/2$

Le point de vue « intégral » : en faisant le même type d'approximation que celui qui a conduit à approcher l'aire du disque par celle d'une réunion de rectangles, la contribution ΔIr est approximativement de la forme $f(r)\Delta r$ avec $f(r)=2\pi\mu\, r^3$ et la somme des contributions est donnée par l'intégrale : $\int_0^R 2pmr\,3dr$ et on retrouve le résultat précédent.

Références :

[1] ERMEL (Eds.) (1999). *Vrai ? Faux ?... On en débat !* INRP, Paris.
[2] Heath T.L. (1921). *A History of Greek Mathematics*. Oxford.
[3] Kahane J.P. (1985). La théorie de Théodore des corps quadratiques réels, *L'Enseignement Mathématique,* 85-92.
[4] Lutz R., Makhlouf A., Meyer E. (1996). *Fondements pour l'enseignement de l'analyse en termes d'ordre de grandeur.* Brouchure n°104. APMEP.
[5] IREM de Strasbourg (1992). Des activités pour un enseignement modulaire en Seconde. IREM de Strasbourg.
[6] Germain G. (1993). Le quadrilatère qui tourne, in Commission InterIREM Second Cycle (eds), *Maths en seconde : énoncés et scénarios,* p. 49-58, IREM de Lyon.
[7] Artigue M. & al. (1998). *L'intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée,* Cahier DIDIREM n° spécial 3, IREM Paris 7.